PROBABILIDADES Y ESTADISTICA II

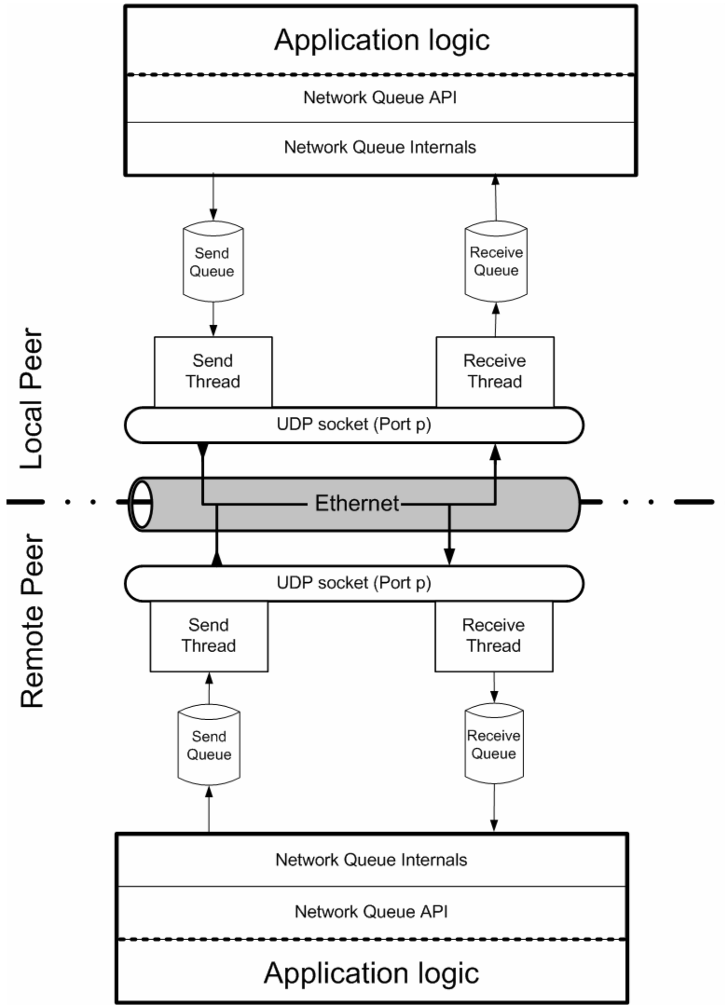
CADENAS DE MARKOV EN TIEMPO DISCRETO

CADENAS DE MARKOV EN TIEMPO CONTINUO

SISTEMAS DE COLAS

Ríos-Insua, S., Mateos-Caballero, A., Bielza, C., Jimenez-Martín, A. (2004), *Investigación Operativa. Modelos determinísticos y estocásticos,* Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S.A.

CONTENIDOS


Application logic
Network Queue API
Network Queue Internals
Send Queue
Receive Queue
Send Thread
Receive Thread
UDP socket (Port p)
Local Peer
Ethernet
Remote Peer
UDP socket (Port p)
Send Thread
Receive Thread
Send Queue
Receive Queue
Network Queue Internals
Network Queue API
Application logic

3. Redes de colas cerradas

Nos centraremos también en redes de Jackson.
Supongamos un sistema con *K* clientes,
una población finita que viaja continuamente dentro de la red.

Hay *R* procesadores, donde el tiempo de servicio en el procesador *i* es exponencial con tasa μ_i, $i=1,2,...,R$. Terminado el servicio en el procesador *i*, el cliente se une a la cola del procesador *j* ($j=1,2,...,R$) con probabilidad p_{ij}, donde ahora, por ser una red cerrada,

$$\sum_{j=1}^{R} p_{ij} = 1 \text{ para todo } i = 1,2,...,R.$$

Además, no hay llegadas desde fuera del sistema ($\lambda_i = 0, \forall i$).

Ahora, estas p_{ij} forman una matriz *P* estocástica, de probabilidades de transición de una cadena de Markov de parámetro discreto, que supondremos irreducible.

Redes de colas cerradas

Sabemos que la distribución estacionaria $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1,...,\pi_R)$ de esta cadena (con $\sum_i \pi_i=1$) es la única solución de

$$\pi_i = \sum_{j=1}^{R} \pi_j p_{ji}.$$

Sea $\Lambda_i(K)$, como antes, la tasa media de llegadas al procesador i (i = 1, 2,... ,R), o equivalentemente su tasa media de finalización del servicio, donde hacemos explícita la dependencia del número K de clientes en el sistema cerrado.

Entonces, análogamente al caso abierto,

$$\Lambda_i(K) = \sum_{j=1}^{R} \Lambda_j(K) p_{ji},$$

que al compararlo con la expresión anterior, nos conduce a

Redes de colas cerradas

$$\Lambda_i(K) = \lambda(K)\pi_i, \text{ donde } \lambda(K) = \sum_{i=1}^{R} \Lambda_i(K).$$

Luego, $\lambda(K)$ es la tasa media de finalización del servicio de todo el sistema, es decir, el paso a través del sistema.

Si $\pi_K(n_1,...,n_R)$ denota la probabilidad estacionaria de que haya n_1 clientes en el nodo 1,..., n_R clientes en el nodo R, con $\sum_i n_i = K$, puede verificarse por sustitución en las ecuaciones de equilibrio correspondientes que

$$\pi_K(n_1,...,n_R) = \begin{cases} l_K \prod_{i=1}^{R} \left(\frac{\Lambda_i(K)}{\mu_i}\right)^{n_i}, & \text{si } \sum_{i=1}^{R} n_i = K \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo l_K una constante.

Como habíamos hallado antes el valor de $\Lambda_i(K)$, al sustituir en la expresión precedente queda

$$\pi_K(n_1, ..., n_R) = \begin{cases} \dfrac{1}{C_K} \displaystyle\prod_{i=1}^{R} \left(\dfrac{\pi_i}{\mu_i}\right)^{n_i}, & \text{si } \displaystyle\sum_{i=1}^{R} n_i = K \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

($\lambda(K)^K$ se cancela), donde $1/C_K$ es la constante de normalización de la distribución, es decir,

$$C_K = \sum_{\substack{n_1,\dots,n_R: \\ n_1+\cdots+n_R=K}} \prod_{i=1}^{R} \left(\frac{\pi_i}{\mu_i}\right)^{n_i}.$$

Una vez más tenemos una solución estacionaria en forma de producto, aunque éste no es el producto de las distribuciones de los estados de los nodos individuales. Los estados de los nodos ahora no son independientes, como es evidente por ser $\sum_i n_i = K$ (fijo).

Existe una generalización del anterior resultado (Teorema de Gordon y Newell) al caso de que en cada nodo haya c_i servidores idénticos en lugar de sólo uno, sirviendo cada uno, como antes, con tiempo exponencial de tasa μ_i. Se tiene que

$$\pi_K(n_1, ..., n_R) = \begin{cases} \frac{1}{D_K} \prod_{i=1}^{R} \frac{\left(\frac{\pi_i}{\mu_i}\right)^{n_i}}{d_i(n_i)}, & \text{si } \sum_{i=1}^{R} n_i = K \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde

$$d_i(n_i) = \begin{cases} n_i!, & \text{si } n_i \leq c_i \\ c_i!(c_i)^{n_i - c_i}, & \text{si } n_i > c_i \end{cases}$$

$$D_K = \sum_{\substack{n_1,...,n_R: \\ n_1+\cdots+n_R=K}} \prod_{i=1}^{R} \frac{\left(\frac{\pi_i}{\mu_i}\right)^{n_i}}{d_i(n_i)}.$$

A partir de la distribución conjunta $\pi_K(n_1,...,n_R)$, pueden calcularse sus distribuciones marginales para obtener las medidas de interés en cada nodo.

3. 1 Teorema de Llegadas

El problema del enfoque que acabamos de ver son las constantes de normalización.

Éstas son difíciles de calcular pues requieren sumar en el con-junto de posibles vectores $(n_1,...,n_R)$ tales que $\sum_i n_i = K$, que son $(K+R-1)/K$ sumandos (número de formas de colocar K clientes en R nodos).

Esto es sólo eficiente para valores pequeños de K y R. Existen algoritmos para reducir el tiempo de computación de la mencionada constante, como el algoritmo de convolución de Buzen (1973).

Sin embargo, veamos una aproximación alternativa que nos permitirá calcular recursivamente numerosas cantidades de interés sin tener que hallar primero las constantes de normalización.

Este procedimiento recursivo se denomina análisis del valor medio.

El estudio será para el caso de un procesador en cada nodo.

Teorema de llegada. En una red cerrada con K clientes, una llegada al procesador i observa el sistema con la distribución estacionaria de la misma red cuando hay sólo K-1 clientes.

Sean ahora $L_i(K)$ y $W_i(K)$ el número medio de clientes y el tiempo medio que un cliente pasa en el nodo i cuando hay K clientes en la red, respectivamente. Condicionando al número de clientes que una llegada al nodo i encuentra en ese nodo

$$\begin{aligned} W_i(K) &= \frac{1 + E_K(\text{número en el nodo } i \text{ según la llegada})}{\mu_i} \\ &= \frac{1 + L_i(K-1)}{\mu_i}. \end{aligned}$$

La segunda igualdad se da por el teorema de llegada.

Cuando hay K-1 clientes en la red, se tiene por $\Lambda_i(K) = \lambda(K)\pi_i$,

$$\Lambda_i(K-1) = \lambda(K-1)\pi_i. \quad \textbf{(14.1)}$$

Redes de colas cerradas. Teorema de Llegadas

Utilizamos ahora la identidad de coste con la regla de que en la red de *K-1* clientes, cada cliente paga 1 euro por unidad de tiempo mientras está en el nodo *i*, obteniendo

$$L_i(K-1) = \lambda(K-1)\pi_i W_i(K-1). \qquad \textbf{(14.2)}$$

Por lo tanto,

$$W_i(K) = \frac{1 + L_i(K-1)}{\mu_i} = \frac{1 + \lambda(K-1)\pi_i W_i(K-1)}{\mu_i} \qquad \textbf{(14.3)}$$

Además, como

$$\sum_{j=1}^{R} L_j(K-1) = K-1$$

conseguimos (de 14.2)

$$K-1 = \lambda(K-1)\sum_{j=1}^{R}\pi_j W_j(K-1) \quad \text{o} \quad \lambda(K-1) = \frac{K-1}{\sum\limits_{j=1}^{R}\pi_j W_j(K-1)}. \qquad \textbf{(14.4)}$$

Finalmente, sustituyendo en (14.3) llegamos a la siguiente fórmula recursiva

$$W_i(K) = \frac{1}{\mu_i} + \frac{(K-1)\pi_i W_i(K-1)}{\mu_i \sum_{j=1}^{R} \pi_j W_j(K-1)}.$$

Así, el procedimiento a seguir será obtener primero las probabilidades π_i, i= 1,2,...,R, y el tiempo $W_i(1) = 1/\mu_i$. Después, a partir de la expresión anterior, calcularemos de forma recursiva $W_i(2)$, $W_i(3)$,...,$W_i(K)$.

Con (14.4) tendremos $\lambda(K)$, el paso a través del sistema, que determinará mediante (14.2) el valor de $L_i(K)$.

4. Redes más generales

Jackson consideró redes abiertas más generales, que incluían a las redes cerradas como caso particular:

El proceso de llegadas exógenas puede ser dependiente del número total de clientes en el sistema y la tasa de servicio en cualquier nodo puede ser dependiente del número de clientes es ese nodo (véase Kleinrock, 1975).

La solución también viene dada en forma de producto, pero los nodos no actúan como $M/M/c_i$ independientes.

Por tanto, la constante de normalización debe calcularse como en el caso de las colas cerradas, pero es aún más complejo porque el sumatorio abarca un número infinito de probabilidades.

Redes más generales

Entre las redes aún más generales destacamos las redes multiclase, con varias clases de prioridad por la red.

Las clases pueden diferir en sus tiempos de servicio y en sus probabilidades de transición hacia otros nodos.

Si ningún cliente de determinada clase entra o sale de la red, esa clase es cerrada.

Si no ocurre esto la clase es abierta.

Si la red contiene ambos tipos de clases se denomina red mixta.

Entre éstas, destacamos las redes BCMP, cuyas siglas responden a sus autores Baskett, Chandy, Muntz y Palacios (Baskett et al., 1975).

En ellas se permiten disciplinas de colas diferentes por la red e incluso clientes que cambian de clase de prioridad (entre un número fijo de clases) según se mueven de un nodo a otro.

Redes más generales

Las soluciones son en forma de producto, para ciertas disciplinas.

Más aún, Kelly (1975) generaliza estas redes pudiendo los clientes seguir caminos arbitrarios en la red y no ramificaciones de tipo Bernoulli, como las vis-tas.

En Gross y Harris (1998) se detallan redes que no son de Jackson, al tener probabilidades de transición entre los nodos de la red, *pij*, dependientes del estado.

Es decir, al salir de un nodo, los clientes eligen a qué nodo ir en función del número de clientes en cada nodo.

La complejidad computacional es enorme al perderse la forma producto de la solución.

El tema de las redes de colas está en continua expansión, creciendo a un rit-mo muy rápido.

En Disney y König (1985) encontramos una revisión exhaustiva de procesos aleatorios en redes de colas, con una lista de 314 referencias.